

Point de Lemoine

résumé à ma façon

28 décembre 2009

1 Table des constructions proposées

| lien | utilisant | message | auteur | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------|---------|--------------|
| Construction 5.2 | directement l'ellipse de Brocard | new | | |
| Construction 7.2 | birapport et l'ellipse de Brocard | new | | |
| Construction 8.2 | polaire de K et ABC | new | | |
| | polaire de K, acb et symétrie | 559732 | bufilon | |
| Construction 8.4 | polaire de K et birapport | 559212 | pappus | ¹ |
| Construction 9.3 | point isodynamique interne | 560692 | pappus | |
| Construction 10.5 | point de Kiepert | new | | |
| Construction 11.4 | point de Tarry | 560163 | JL Aymé | |
| Construction 12.2 | collinéation équilatérale | 557635 | bufilon | |
| | | | | |

2 Symédianes

Definition 2.1. Dans le triangle ABC , la symédiane du point A est la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice intérieure (propriété éponyme).

Proposition 2.2. La propriété utile de la symédiane AK est d'être l'isogonale de la médiane AG wrt les droites AB, AC . On a donc $(AB, AC, AI, AJ_A) = -1 = (AK, AG, AI, AJ_A)$, propriété se conservant par collinéation. Les barycentriques du point de Lemoine sont donc :

$$K = a^2 : b^2 : c^2$$

Notation 2.3. Voici les notations qui seront utilisées pour les triangles usuellement attachés à un centre du triangle :

$$\begin{array}{l} A_K, B_K, C_k \text{ triangle cevien } (A_K = BC \cap AK), \\ \\ K_A, K_B, K_C \text{ triangle anti-cevien } (A, A_K, K, K_A \text{ harmonique}), \end{array} \quad \begin{array}{l} cev = \begin{bmatrix} 0 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ acev = \begin{bmatrix} -a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & -c^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

¹Extraits d'un enregistrement de cette discussion :

#559858 aquilon : félicitations à bufilon pour sa construction et à pappus pour en avoir vu les ressorts ! (j'ai l'impression que bufilon a des facilités de "contemplation" hyperbolique...)

#560922 bufilon : comme l'a, je crois, fait remarquer aquilon dans un de ses messages, on est dans une situation ...

#xxxxxx bufilon=aquilon=vexé. Et il disparaît, emportant ses messages dans le non-espace.

$$\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C \text{ "triangle" cocevien (traces de la polaire } \Delta \text{ de } K), \quad \text{cocev} = \begin{bmatrix} 0 & a^2 & -a^2 \\ b^2 & 0 & b^2 \\ -c^2 & -c^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_A, U_B, U_C \text{ triangle circumcevien } (U_A = AK \cap \Gamma), \quad \text{ucev} = \begin{bmatrix} -a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2b^2 & -b^2 & 2b^2 \\ 2c^2 & 2c^2 & -c^2 \end{bmatrix}$$

La droite $K_B K_C = A\Delta_A$ est tangente en A au cercle Γ , et circulairement. Le triangle $acev$ (K) est aussi appelé triangle tangentiel associé à ABC .

3 Existence pour tout K du disque fermé

Theorem 3.1. *Soit K appartenant au disque fermé ayant Γ pour bord. Pour chaque A de Γ , on a existence-unicité d'une paire $\{B, C\}$ de points sur Γ tels que K soit le point de Lemoine de ABC .*

Démonstration. On prend le repère "affine orthonormé" tel que $O = (0, 0, 1)$, $K = (X, 0, 1)$, $R = 1$. Ceci revient à poser $X = |OK|/R$ et on paramétrise A, B, C par $(1 - t_a^2, 2t_a, 1 + t_a^2)$, etc. Il vient : $a^2 = 4(t_b - t_c)^2 / (1 + t_b^2) / (1 + t_c^2)$, etc. On veut :

$$a^2 A + b^2 B + c^2 C = (a^2 + b^2 + c^2) K$$

On élimine t_c et il vient une équation du second degré avec $W_0 = \sqrt{3(1 - X^2)}$. □

Remark 3.2. Si l'on résout l'équation précédente, on trouve :

$$t_b, t_c = \frac{4t_a(X-1)}{3(1+X)t_a^2 + X - 1} \pm \frac{((1+X)t_a^2 + 1 - X)W_0}{(1+X)(3(1+X)t_a^2 + X - 1)}$$

Tout dépend rationnellement de X et de W_0 , prouvant la constructibilité.

Corollary 3.3. *Si l'on ne dispose pas d'une autre solution, il est toujours possible de faire $t_a = 0$ dans les équations précédentes, obtenant le triangle isocèle (constructible) :*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2X - 1 \\ W_0 \\ 2 - X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2X - 1 \\ -W_0 \\ 2 - X \end{bmatrix}$$

4 Pour un triangle donné

Theorem 4.1. *On se donne un triangle ABC , donnant du même coup Γ et K . Les triangles $A'B'C'$ partageant les mêmes Γ et K ont pour ABC -barycentriques :*

$$(A', B', C') = \begin{pmatrix} \alpha a^2 & (\alpha - 1)\alpha a^2 & (1 - \alpha)a^2 \\ (1 - \alpha)b^2 & \alpha b^2 & (\alpha - 1)\alpha b^2 \\ (\alpha - 1)\alpha c^2 & (1 - \alpha)c^2 & \alpha c^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

où α est la tangente d'un angle, c'est à dire $\alpha \in \Re(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2))$.

Démonstration. On paramétrise par : $A' = a^2\alpha : b^2(1 - \alpha) : c^2\alpha(\alpha - 1)$, etc. Ceci est bien une paramétrisation rationnelle du cercle Γ parce que l'isogonal de A' est à l'infini. On fait de même pour B' (β) et C' (χ). Les carrés des longueurs des côtés deviennent :

$$a'^2 \propto (b^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)\alpha + c^2\alpha^2)(\beta - \chi)^2 \quad (2)$$

On écrit que $K(A', B', C') = K(A, B, C)$ et on trouve β, χ en fonction de α . On trouve une solution parasite $\alpha = \beta = \chi$ correspondant à des longueurs nulles et K indéterminé. A part cela,

$$\{\beta, \chi\} = \left\{ \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \frac{1}{1 - \alpha} \right\}$$

Si l'on impose en outre de conserver l'orientation, on les prend dans cet ordre. □

Exemple 4.2. La valeur $\alpha = 1$ donne ABC , $\alpha = 0$ donne BCA , $\alpha = \infty$ donne CAB . La valeur $\alpha = -1$ donne U_A, U_B, U_C (le triangle circumcevien de K par rapport à ABC), tandis que $\alpha = 2$ donne U_B, U_C, U_A et $\alpha = 1/2$ donne U_C, U_A, U_B .

5 Enveloppe des droites $B'C'$

Theorem 5.1. L'enveloppe des droites $B'C'$ est γ , la conique inscrite de Brocard, ayant $K = X(6)$ comme perspecteur. Les foyers sont les points de Brocard $\omega^+ = 1/c^2 : 1/a^2 : 1/b^2$ et $\omega^- = 1/b^2 : 1/c^2 : 1/a^2$. Le centre est $X(39) = (\omega^+ + \omega^-) / 2 = \omega^0$.

Démonstration. L'équation barycentrique de la droite $B'C'$ est :

$$B'C' \simeq B' \wedge C' \simeq \left(\alpha, \frac{a^2(1-\alpha)}{b^2}, \frac{a^2(\alpha-1)\alpha}{c^2} \right)$$

La technique usuelle, intersection de deux droites ayant des paramètres infinitésimalement voisins, donne le point de contact:

$$A'_K = a^2(1-\alpha)^2 : b^2\alpha^2 : c^2 \quad (3)$$

Utilisant $\alpha = 1, 0, \infty$ on voit que le lieu de ces points est la conique inscrite ayant $K=X(6)$ pour perspecteur (et le calcul vérifie que le lieu est bien une conique). Evidemment, ce lieu est aussi l'enveloppe des deux autres côtés. \square

Construction 5.2. [utilisant l'ellipse de Brocard] Pour construire les points B', C' connaissant A' , on trace $A'K$. L'intersection avec γ (celle au delà de K) donne le point A'_K . La tangente en ce point à la conique γ recoupe le cercle Γ aux deux points cherchés.

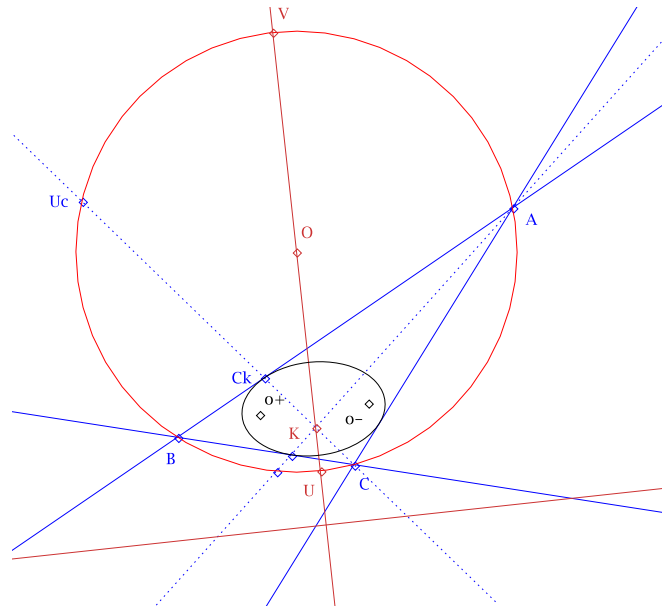


FIG. 1 – Ellipse

6 Ellipse de Brocard, angles de Steiner

Remark 6.1. Le problème dépend naturellement des carrés des longueurs et admet OK pour axe de symétrie. Posons $X = |OK|/R$. Il vient :

$$X = 2W / (a^2 + b^2 + c^2)$$

expression dans laquelle W est le radical de Brocard

$$W = \sqrt{a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + c^4 - b^2c^2 + b^4}$$

Au vu des propriétés des extensions quadratiques, toutes les quantités cherchées seront quadratiques en X . Une formulation plus précise est : appartiendront à une extension quadratique de $\mathbb{Q} [R, X, \sqrt{3}]$.

Notation 6.2. Les points à l'infini ne sont pas normalisables (on pourrait utiliser l'isogonal d'un point normalisé, mais cela n'est pas "naturel"... et ne conduit pas à des expressions intéressantes). Nous utiliserons donc exactement les valeurs listées TAB. 1.

| nom | # | bary |
|--|--------|---------------------------------------|
| O, circonscrit | X(3) | $a^2 (b^2 + c^2 - a^2)$ |
| Brocard midpoint | X(39) | $a^2 (b^2 + c^2)$ |
| $\mathcal{L}_\infty \wedge OK$ (Brocard) | X(511) | $a^2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^4 - c^4)$ |
| orthopoint de X(511) | X(512) | $a^2 (b^2 - c^2)$ |
| Schoute center | X(187) | $a^2 (b^2 + c^2 - 2a^2)$ |

TAB. 1 – Le choix de représentants utilisé

Lemma 6.3. Les intersections de OK avec Γ sont $U=X(1379)$ près de K et $V=X(1380)$, loin de K . Et l'on a :

$$U = \frac{X-1}{X} \times O + \frac{1}{X} \times K ; V = \frac{X+1}{X} \times O - \frac{1}{X} \times K \quad (4)$$

Démonstration. Calcul direct sur les barycentriques. \square

Lemma 6.4. Les intersections de OK avec γ sont $u=X(2029)$, près de K , loin de O et $v=X(2028)$, loin de K , près de O . Et l'on a :

$$u = \frac{X^2-1}{X(X+2)} \times O + \frac{1+2X}{X(X+2)} \times K ; v = \frac{X^2-1}{X(X-2)} \times O + \frac{1-2X}{X(X-2)} \times K \quad (5)$$

$$X(39) = \frac{1-X^2}{4-X^2} \times O + \frac{3}{4-X^2} \times K$$

Démonstration. Calcul direct sur les barycentriques. \square

Lemma 6.5. Le point à l'infini de $\omega^+ \omega^-$ est $X(512) = a^2 (b^2 - c^2)$, etc.

Démonstration. Par raison de symétrie, ce point est l'orthopoint de $X(511) = \mathcal{L}_\infty \wedge KO$. \square

Proposition 6.6. Les données métriques concernant l'ellipse de Brocard sont traditionnellement exprimées en fonction de l'angle de Brocard $\hat{\omega}$:

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \quad (6)$$

Les formules avec X sont nouvelles.

| | | | |
|---|---|---|------------------------------------|
| $ OK = RX$ | $ O\omega^+ = RX \sqrt{\frac{3}{4-X^2}}$ | $ K\omega^+ = RX \sqrt{\frac{1-X^2}{4-X^2}}$ | $ O\omega^0 = 3R \frac{X}{4-X^2}$ |
| grand demi-axe | $ u\omega^+ $ | $R \sin \omega$ | $R \sqrt{\frac{1-X^2}{4-X^2}}$ |
| petit demi-axe | $ u\omega^0 $ | $2R \sin^2 \omega$ | $2R \frac{1-X^2}{4-X^2}$ |
| distance focale | $ \omega^0 \omega^+ $ | $Re \sin \omega$ | $\frac{RX}{4-X^2} \sqrt{3(1-X^2)}$ |
| $\cos(\omega) = \sqrt{\frac{3}{4-X^2}}$ | $\sin(\omega) = \sqrt{\frac{1-X^2}{4-X^2}}$ | $\cot(\omega) = \sqrt{\frac{3}{1-X^2}}$ | $e = X \sqrt{\frac{3}{4-X^2}}$ |

Démonstration. Pythagore en barycentriques. □

Corollary 6.7. *Les points de Brocard sont constructibles à partir de K, O, R seuls.*

Démonstration. Les formules ci-dessus sont suffisantes. On peut aussi en déduire que :

$$\begin{aligned} |OK|^2 &= |O\omega^+|^2 + |K\omega^+|^2 \\ \frac{4}{|OK|^2} &= \frac{3}{|O\omega^+|^2} + \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

On a donc ω^+, ω^- sur le cercle de diamètre OK ("le" cercle de Brocard) et aussi sur le cercle centré en O de rayon $|OK| \sqrt{3}/(4 - X^2) = eR$ (second cercle de Brocard). □

Proposition 6.8. *Les valeurs de α qui conduisent à A' sur OK (et donc à un triangle isocèle) sont :*

$$\alpha_1, \alpha_2 = -(b^2 - c^2)/(a^2 - b^2) \mp W/(a^2 - b^2)$$

Les valeurs correspondantes de l'angle A' sont données par $2\hat{\omega}_1$ et $2\hat{\omega}_2$ (angles de Steiner) avec :

$$\cot(\hat{\omega}_1) = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1+X}{1-X}}; \quad \cot(\hat{\omega}_2) = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1-X}{1+X}}$$

On vérifie aisément que $\hat{\omega} + \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 = \pi/2$ (relation de Lemoine).

Démonstration. Résolution de $b'^2 = c'^2$ à partir de (2). □

7 Caractérisation de K par un birapport

Lemma 7.1. *Le point K est caractérisé par la relation $(A, U_A^P, A_P, P) = (B, U_B^P, B_P, P)$. On a alors, pour tout sommet d'un triangle $A'B'C'$:*

$$(A', U_{A'}, A'_K, K) = 3$$

Démonstration. Pour $P = x : y : z$, ce birapport vaut $(yz a^2 + zx b^2 + xy c^2) / (yz a^2)$. □

Construction 7.2 (utilisant le birapport et l'ellipse). *Partant du point A' , on détermine $U_{A'} = \Gamma \cap A'K$ puis A'_K tel que $(A', U_{A'}, A'_K, K) = 3$. La droite $B'C'$ est alors la tangente en A'_K à γ .*

Theorem 7.3 (pappus, 561155). *Triangles ABC and $A'B'C'$ are inscribed in the same circle Γ . Let L be the Lemoine point of ABC , L' the Lemoine point of $A'B'C'$ and f the collineation defined by $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$; $f(L) = L'$. Then $f(\Gamma) = \Gamma$.*

Démonstration. abc is the circumcevian triangle of ABC wrt L . $a'b'c'$ is the circumcevian triangle of $A'B'C'$ wrt L' . For reasons of incidence, we have: $f(u) = u'$; $f(v) = v'$; $f(w) = w'$ and for reasons of equalities of cross-ratios $(A, a, u, L) = (A', a', u', L') = 3$ etc. Therefore $f(a) = a'$; $f(b) = b'$; $f(c) = c'$. □

Corollary 7.4. *Such f is an hyperbolic motion in the Klein model.*

Corollary 7.5. *La collinéation qui réalise $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ et laisse invariant Γ est caractérisée par $K \mapsto K$. De même pour la collinéation qui transpose A, B et laisse invariant C, Γ . Leurs matrices respectives sont :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2/c^2 \\ b^2/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2/b^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & a^2/b^2 & 0 \\ b^2/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Polaire de K

Lemma 8.1. *Le point K est caractérisé par le fait que sa tripolaire (droite de Lemoine) est aussi sa polaire wrt Γ . La cir-polaire de K est donc la droite de Lemoine commune à tous les triangles $A'B'C'$.*

Démonstration. Par définition, la tri-polaire de $P = x : y : z$ est la droite admettant $1/x, 1/y, 1/z$ pour barycentriques. La cir-polaire de P est $zb^2 + yc^2, a^2z + xc^2, a^2y + xb^2$. Par identification, on obtient la propriété annoncée. \square

Construction 8.2 (utilisant la polaire de K). *Pour construire B', C' connaissant A' , on trace $A'B$ et $A'C$ qui coupent Δ en Δ_{ab} et Δ_{ca} . On trace alors $A\Delta_{ab}$ qui recoupe Γ en B' et $A\Delta_{ca}$ qui recoupe Γ en C' (cf. FIG. 2).*

Démonstration. Le calcul de $(A' \wedge B) \wedge (A \wedge B')$ à partir de (1) donne :

$$a^2 : -b^2\alpha : c^2(\alpha - 1)$$

qui appartient à Δ (l'existence-unicité de la solution ayant déjà été prouvée, il suffit d'identifier cette solution). \square

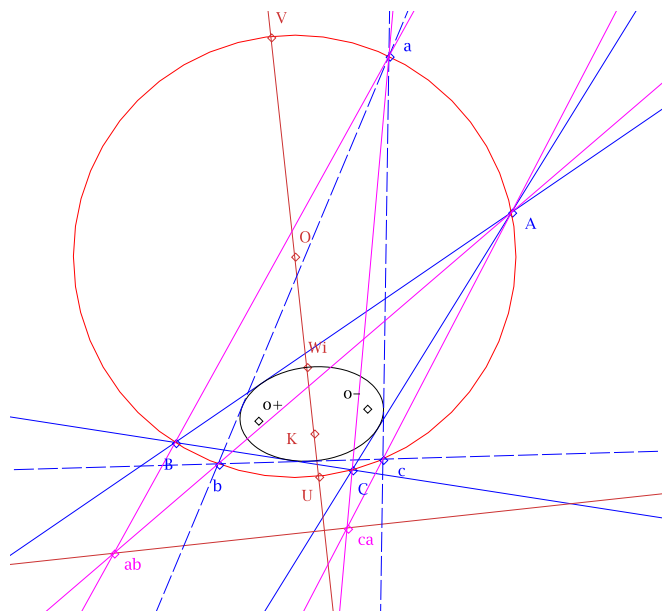


FIG. 2 – Polaire

Remark 8.3. Avec cette construction, on a automatiquement la relation $\Delta_{bc} \doteq BC' \cap B'C \in \Delta$ par le théorème de Pascal-Brianchon.

Construction 8.4 (utilisant la polaire et le birapport, #559212). *La droite BC est aussi la droite $\Delta_A A_K$. Rappelons que A_K est obtenu par $U_A = \Gamma \cap AK$ puis $(A', U_{A'}, A'_K, K) = 3$; et que Δ_A est l'intersection de la polaire de K et de la tangente en A au cercle Γ .*

Démonstration. On fait tendre B' vers A . Par unicité (sous réserve de l'orientation) $(A', B', C') \rightarrow (C, A, B)$. Alors AA' (la tangente en A) coupe BC sur la droite de Lemoine. Un calcul direct va aussi bien. \square

9 Points isodynamiques

Definition 9.1. Les points isodynamiques sont caractérisés par le fait que leur triangle circumcevien est équilatéral.

C'est donc un cercle. Son centre est le pôle de la droite de l'infini. On constate que ce cercle fait partie du faisceau Γ, Δ . \square

Theorem 10.2. *Les points isodynamiques sont les points de Poncelet du faisceau engendré par le cercle circonscrit et le premier cercle de Brocard (diamètre OK). L'axe radical du faisceau est Δ la polaire de K (droite de Lemoine). La puissance commune est $R^2(1 - X^2)/X^2$. Le cercle \mathcal{G} fait partie du faisceau.*

Démonstration. L'écriture standard d'un cercle est $C(P) = \Gamma(P) + k \mathcal{L}_\infty \Delta$ avec \mathcal{L}_∞ ligne de l'infini et Δ axe radical. Le cercle de Brocard s'écrit :

$$a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy - (x + y + z) \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} (xb^2c^2 + ya^2c^2 + za^2b^2)$$

Ceci donne l'axe radical et la puissance commune. Celle-ci étant positive, on a un faisceau de Poncelet. Le reste se calcule aisément. \square

Lemma 10.3. *Le faisceau de Poncelet standard est constitué des cercles :*

$$C(\mu) = \mu((x-1)^2 + y^2) + (1-\mu)((x+1)^2 + y^2)$$

L'inverse du cercle $C(\nu)$ par rapport au cercle $C(\mu)$ est le cercle $C(\tau)$ déterminé par :

$$\tau = \frac{\mu^2(1-\nu)}{\mu^2 - 2\mu\nu + \nu}$$

Démonstration. Calcul immédiat à partir de $\phi(M) = O + (M - O) \times R^2 / |OM|^2$. \square

Proposition 10.4. *L'inverse du centre de gravité par rapport au cercle de Brocard est le foyer de la parabole de Kiepert $X(110)$ -appelé F ou point de Kiepert dans ce qui suit. Ce point appartient au cercle circonscrit.*

Démonstration. Un calcul immédiat sur les barycentriques donne $X(110) = \frac{a^2}{b^2 - c^2} : \frac{b^2}{c^2 - a^2} : \frac{c^2}{a^2 - b^2}$ et l'on voit que ce point est l'isogonal d'un point à l'infini. Cette propriété confirme et "explique" la Proposition 10.1. \square

Construction 10.5 (utilisant le point de Kiepert). *Pour un sommet donné A , on trace la tangente en A à Γ qui coupe la polaire de K en Δ_A . La droite joignant Δ_A avec A_σ , symétrique de A par rapport à OK , recoupe Γ en un point F . La demi-droite issue du milieu de (O, K) et passant par F coupe le cercle \mathcal{G} en un point. Une construction immédiate donne $A_G = (3G - A)/2$ et la droite BC est obtenue en joignant Δ_A avec A_G .*

Démonstration. L'existence-unicité est déjà prouvée et le point F est le point de Kiepert du futur triangle. \square

11 Points de Tarry

Lemma 11.1. *La matrice de la symétrie σ par rapport à la droite OK est :*

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{b^2 - c^2} & \frac{a^2}{b^2(a^2 - b^2)} & \frac{a^2}{c^2(c^2 - a^2)} \\ \frac{b^2}{a^2(a^2 - b^2)} & \frac{1}{c^2 - a^2} & \frac{b^2}{c^2(b^2 - c^2)} \\ \frac{c^2}{a^2(c^2 - a^2)} & \frac{c^2}{b^2(b^2 - c^2)} & \frac{1}{a^2 - b^2} \end{bmatrix}$$

Démonstration. Formule habituelle : identité moins deux fois la projection. \square

Lemma 11.2. *Les colonnes de la matrice M_σ sont les sommets du triangle $T_\sigma = A_\sigma B_\sigma C_\sigma$ symétrique de $T = ABC$ par rapport à OK . Les droites issues des sommets de T_σ perpendiculairement au côté opposé correspondant de T concourent au point $X(98)$, point de Tarry de ABC . Les droites analogues issues de T vers T_σ concourent en $X(2698) = \sigma(X_{98})$.*

Démonstration. Le premier résultat vient par un calcul immédiat, et le second vient de la symétrie de la figure. Ce résultat confirme la propriété générale de symétrie de la relation d'orthologie. \square

Proposition 11.3. *Le triangle T_σ symétrique de ABC par rapport à OK et le triangle cocévien de K admettent pour perspecteur le point de Kiepert $X(110)$. Remarque : Les points $X(2)$, $X(98)$, $X(110)$, $X(182)$ –gravité, Tarry, Kiepert, Brocard– sont alignés.*

Démonstration. Calcul immédiat sur les barycentriques. \square

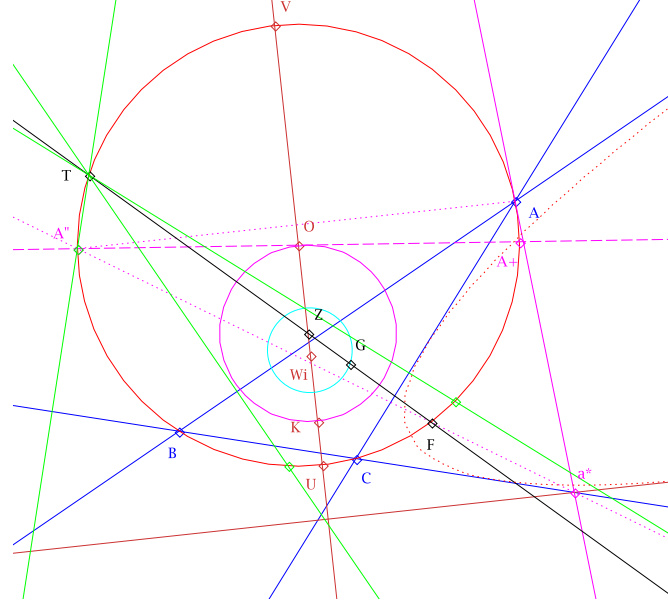


FIG. 4 – Kiepert-Tarry

Construction 11.4 (utilisant le point de Tarry, #560163). *Comme pour Construction 10.5 jusqu'à obtenir F . On construit T comme seconde intersection de Γ avec la droite passant par F et le milieu de (O, K) . On construit A^+ comme antipode de $\sigma(A)$. Alors la droite BC est issue de Δ_A en tant que perpendiculaire à TA_σ ou bien en tant que parallèle à TA^+ .*

Démonstration. L'existence-unicité est déjà prouvée, le point T est le point de Tarry du futur triangle et il est clair que A^+ et A_σ sont diamétralement opposés. \square

12 Une collineation

Theorem 12.1. *La collineation ϕ ayant pour matrice $RM_R + \sqrt{3}M_3$ avec :*

$$M_3 = \begin{bmatrix} (2b^2 + 2c^2 - a^2)abc & \frac{ca^3(c^2 - a^2)}{b} & \frac{ba^3(b^2 - a^2)}{c} \\ \frac{cb^3(c^2 - b^2)}{a} & (2a^2 + 2c^2 - b^2)abc & \frac{ab^3(a^2 - b^2)}{c} \\ \frac{bc^3(b^2 - c^2)}{a} & \frac{ac^3(a^2 - c^2)}{b} & (2a^2 + 2b^2 - c^2)abc \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} \frac{8b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - a^4}{b^2(3c^2 + b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} & \frac{a^2(3c^2 + a^2 - b^2)(c^2 - a^2)}{b^2} & \frac{a^2(3b^2 + a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{c^2} \\ \frac{c^2(3b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{a^2} & \frac{8a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 - b^4}{c^2(3a^2 + c^2 - b^2)(a^2 - c^2)} & \frac{b^2(3a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{c^2} \\ \frac{8a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - c^4}{c^2} & & \end{bmatrix}$$

vérifie : $\phi(U) = U$, $\phi(V) = V$, $\phi(\Gamma) = \Gamma$, $\phi(K) = O$, $\phi(X_{512}) = X_{512}$. Dans ces conditions, l'image de γ est un cercle centré en $O = \phi(K)$. L'image d'un triplet $A'B'C'$ (tel qu'étudié ci-dessus) est un triplet $A''B''C''$ formant un triangle équilatéral inscrit dans Γ et circonscrit à $\phi(\gamma)$ –cf FIG. 5.

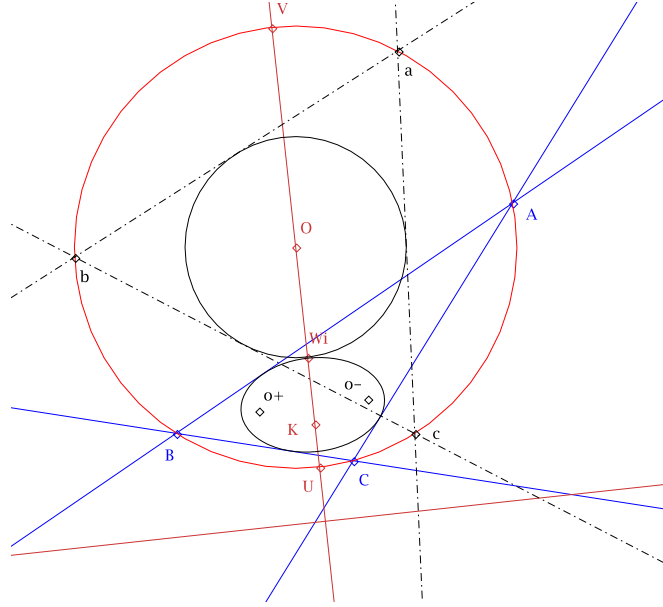


FIG. 5 – Collinéation

Démonstration. Lorsque l'on donne les images de quatre points, cela fournit 12 équations correspondant à 13 inconnues (les neuf coefficients de $\boxed{\phi}$ et quatre facteurs de proportionnalité). Comme U, V, K, O sont alignés, cela laisse la place pour une condition supplémentaire (U, V sont fixés ainsi que leurs tangentes UX_{512}, VX_{512}). L'élimination conduit à une équation du second degré, qui se factorise. Les deux solutions correspondent aux deux orientations possibles. Celle donnée conserve l'orientation.

Le résultat étant dans $\mathbb{Q}[a, b, c, R, \sqrt{3}]$ il y a multiplicité des écritures (R est quadratique $\mathbb{Q}[a, b, c]$). On obtient le résultat indiqué par symétrisation. On constate les facteurs $(a^2 - b^2)$ qui annulent les termes non diagonaux correspondants lorsque le triangle est isocèle.

Soit u un point de γ . En utilisant la paramétrisation (3), le calcul de $|O\phi(u)|^2$ est immédiat. On constate que le paramètre s'élimine : $\phi(\gamma)$ est un cercle centré en O . Par conservation des droites et des contacts, la conique $\phi(\gamma)$ est tangente à $A''B''$ puisque γ est tangente à $A'B'$: le cercle $\phi(\gamma)$ est le cercle inscrit de $A''B''C''$. Comme ce cercle est concentrique au circonscrit de $A''B''C''$ (qui n'est autre que Γ), ce triangle est équilatéral. \square

Autre fin de la preuve. Soit $U_{A''}$ la deuxième intersection de Γ et de OA'' , ainsi que $A''O$ l'intersection de OA'' et $B''C''$. Par conservation des droites et de Γ , on a $U_{A''} = \phi(U_{A'})$ et $A''O = \phi(A'_K)$. Par conservation des birapports, O est donc aussi le point de Lemoine de $A''B''C''$ et ce triangle est équilatéral. Son cercle inscrit est donc concentrique avec Γ . \square

Construction 12.2 (utilisant directement la collinéation, #557635). On construit $A'' = \phi(A')$ et on complète le triangle équilatéral $A''B''C''$ (avec la même orientation que $A'B'C'$). Puis on construit $B' = \phi^{-1}(B'')$ et $C' = \phi^{-1}(C'')$.