

Quadrangle de Lemoine, etc

6 juillet 2010

Ce qui suit est un ensemble de remarques concernant le fil "Quadrangle de Lemoine", initié par pappus sur <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,606901,page=1>. La question posée portait de quatre points cocycliques A, B, C, D . Dans le présent document, nous allons adopter une problématique légèrement différente, fixant trois des points et examinant comment les choses évoluent lorsque le quatrième point parcourt le cercle (fixe) formé par les trois autres.

Pour ceux qui aiment les fichiers *.pdf, une version globale est disponible ici : <http://www.douillet.info/%7edouillet/triangle/pldx1-lemoine-02.pdf>. Pour la commodité du téléchargement, ce document a été scindé en plusieurs messages. Cette discussion est pour partie une suite du fil "Point de Lemoine" <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,557486,page=1>, dont "un résumé à ma façon" est accessible ici: <http://www.douillet.info/%7edouillet/triangle/pldx1-lemoine-01.pdf>.

Avec quatre points, on peut former quatre triangles, qui seront désignés par la lettre omise, soit \mathcal{T}_a pour DBC , \mathcal{T}_b pour ADC , \mathcal{T}_c pour ABD et \mathcal{T}_d pour ABC (le triangle fixe). Cette façon de fixer les orientations a été choisie pour que le triangle fixe soit un cas particulier pour chacun des trois triangles variables.

La discussion porte sur les 4 points de Lemoine des triangles \mathcal{T}_j et les 8 points isodynamiques associés.

1 Quadrangle de Lemoine

Considérons un triangle ABC fixé et un point variable D sur le cercle circonscrit Γ de ABC . Une paramétrisation rationnelle de D est :

$$D \simeq \begin{pmatrix} \frac{a^2}{b^2} \\ \frac{t}{-c^2} \\ \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \simeq \frac{1}{a^2 t^2 + 2 S_c t + b^2} \begin{pmatrix} a^2 (1+t) t \\ b^2 (1+t) \\ -c^2 t \end{pmatrix}$$

la première affirmant que D est l'isogonal d'un point à l'infini, la deuxième étant la normalisation de la première. Lorsque t varie, le dénominateur ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant... et D est un point ordinaire, pas l'un des deux ombilics du plan. Nous pouvons donc poser, de façon continue, $W = \sqrt{a^2 t^2 + 2 S_c t + b^2} > 0$.

Les formules usuelles donnent les longueurs et la surface du triangle \mathcal{T}_a :

$$a' = a, b' = \frac{ab(1+t)}{W}, c' = \frac{act}{W}, S' = \frac{a^2(1+t)t}{W^2} S$$

Comme nous allons nous limiter à des "strong points", il n'y a pas lieu de discuter des signes de longueurs a', b', c' . Nous allons nous intéresser aux points de Lemoine et aux points isodynamiques. Posons $K_d \doteq X(6, ABC)$ ainsi que $K_a \doteq X(6, \mathcal{T}_a)$, etc. En substituant $a' = a \dots$ dans les coordonnées barycentriques et tenant compte des changements de base, il vient :

$$K_d \simeq \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}, K_a \simeq \begin{pmatrix} a^2(1+t)t \\ b^2(2+t)(1+t) \\ c^2 t(t-1) \end{pmatrix}, K_b \simeq \begin{pmatrix} a^2(1+t)(1+2t) \\ b^2(1+t) \\ c^2(1-t) \end{pmatrix}, K_c \simeq \begin{pmatrix} a^2 t(1+2t) \\ b^2(2+t) \\ -c^2 t \end{pmatrix}$$

Au passage, le lieu de K_a est l'ellipse passant par K_d et bitangente en B et C au cercle circonscrit. De même pour les deux autres points de Lemoine. Ceci conduit à la FIG. 1.

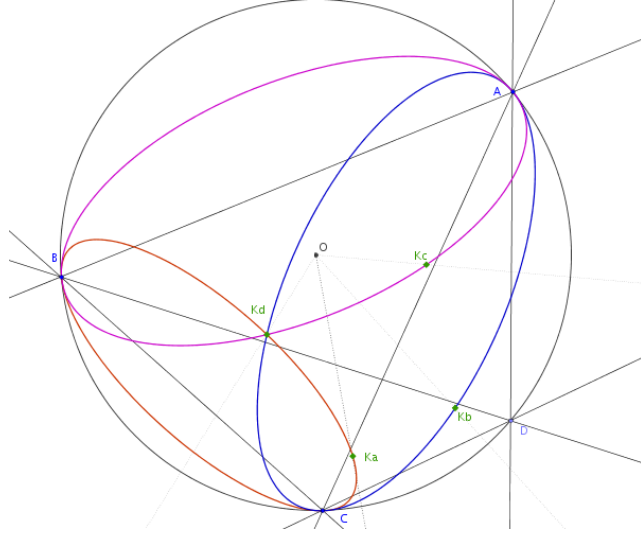


FIG. 1 – Lieu des trois autres centres de Lemoine (pour D variable)

On sait que quatre couples de points en correspondance déterminent une et une seule collinéation (lorsqu'il n'y a pas d'alignements trois par trois). Soit donc f la collinéation ϕ déterminée par les quatre couples $A \mapsto K_a$, etc. Sa matrice est :

$$\boxed{f} = \begin{pmatrix} t & \frac{a^2}{b^2} t^2 (1+2t) & \frac{a^2}{c^2} t(1+t)(1+2t) \\ \frac{b^2}{a^2} (2+t) & t^2 & \frac{b^2}{c^2} (1+t)(2+t) \\ \frac{c^2}{a^2} \frac{(t-1)t}{(t+1)} & \frac{c^2}{b^2} \frac{t^2(1-t)}{(1+t)} & -t(1+t) \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est : $\mu^3 - 4t^2(1+t+t^2)\mu - 8t^4(1+t)$, et ses éléments propres sont :

$$\left[-2t, I = \begin{pmatrix} 0 \\ -b^2(1+t) \\ c^2t \end{pmatrix} \right], \left[-2t^2, J = \begin{pmatrix} -a^2(1+t) \\ 0 \\ c^2 \end{pmatrix} \right], \left[2t+2t^2, K = \begin{pmatrix} a^2t \\ b^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Comme déjà indiqué par Pappus, le triangle IJK est autopolaire par rapport à Γ avec les alignements IBC , IAD , IK_bK_c , IK_aK_d , etc. Considérons la collinéation σ_I déterminée par l'action sur les colonnes : $I \mapsto I$, $J \mapsto -J$, $K \mapsto -K$, ainsi que les deux autres obtenues par permutation circulaire. Leurs matrices sont :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{b^2}{a^2t} & 0 & \frac{b^2(1+t)}{c^2t} \\ \frac{-c^2}{a^2(1+t)} & \frac{c^2t}{b^2(1+t)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2t}{b^2} & \frac{a^2(1+t)}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c^2}{a^2(1+t)} & \frac{-c^2t}{b^2(1+t)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2t}{b^2} & \frac{a^2(1+t)}{c^2} \\ \frac{b^2}{a^2t} & 0 & \frac{b^2(1+t)}{c^2t} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Chacune d'elle est une involution qui conserve globalement le cercle circonscrit, échange les A, B, C, D par paires et échange les K_j par paires. Groupées ensemble avec l'identité, elles forment un ViererGruppe à la Klein.

Considérons les intersections T'_j et T''_j de IK avec le cercle Γ (FIG. 2). Vu les propriétés de σ_j les points $T'_j \leftrightarrow T''_j$, $K_a \leftrightarrow K_b$, $K_c \leftrightarrow K_d$, $T'_j \leftrightarrow T''_j$ sont sur une même conique γ_j , tangente en T'_j, T''_j au cercle Γ . Le diamètre de cette conique par rapport à la direction de $IK = T'_jT''_j$ est la perpendiculaire OJ qui est donc un axe de la conique γ_j : celle-ci contient donc aussi les symétriques des K_j par rapport à OJ .

Bien entendu, cette construction peut être faite pour n'importe lequel des points I, J, K . Pour l'un d'eux, les points T', T'' ne sont pas réels, mais cela ne change pas le résultat concernant les propriétés de symétrie, au contraire.

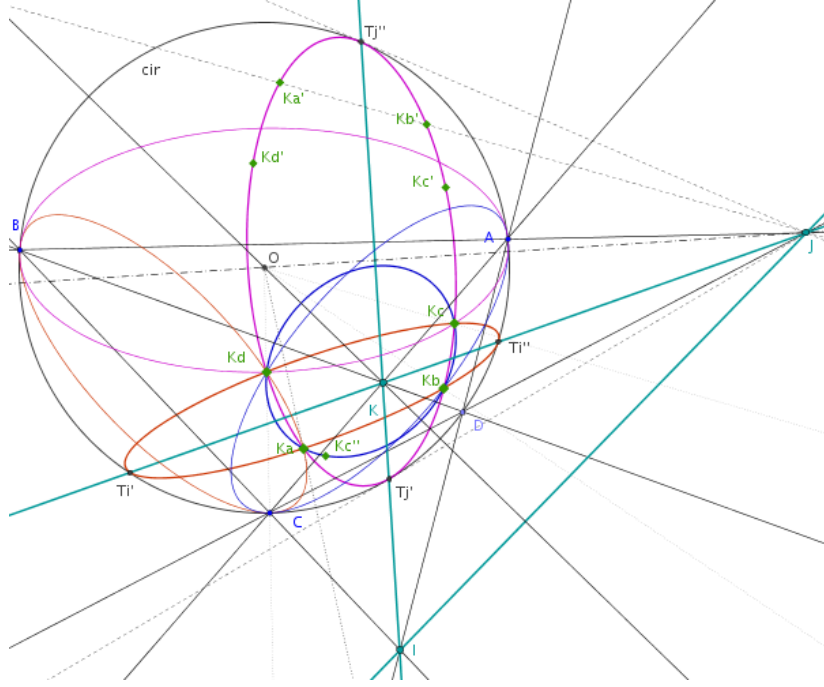


FIG. 2 – Coniques contenant les quatre points de Lemoine

2 Collinéations laissant invariant le cercle circonscrit

Il existe une infinité de collinéations qui envoient $P = p : q : r$ sur $X(3) = O$ et conservent Γ . Nous allons en décrire une en détail. Appelons P^{\parallel} le point à l'infini de PO et P^{\perp} son orthopoint. On a :

$$O \doteq X(3) = a^2 S_a : b^2 S_b : c^2 S_c$$

$$P^{\parallel} \simeq \begin{pmatrix} (b^2 S_b + c^2 S_c) p - a^2 (S_a q + S_a r) \\ (a^2 S_a + c^2 S_c) q - b^2 (S_b r + S_b p) \\ (a^2 S_a + b^2 S_b) r - c^2 (S_c p + S_c q) \end{pmatrix}, \quad P^{\perp} \simeq \begin{pmatrix} (b^2 - c^2) p + a^2 (q - r) \\ (c^2 - a^2) q + b^2 (r - p) \\ (a^2 - b^2) r + c^2 (p - q) \end{pmatrix}$$

tandis que le déterminant des colonnes P, O, P^{\perp} (telles qu'elles sont écrites, et non pas à un facteur près) vaut Δ_P avec :

$$\Delta_P \doteq a^2 c^2 b^2 (r + p + q)^2 + (a^4 + b^4 + c^4 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 - 2 a^2 b^2) (q r a^2 + c^2 q p + b^2 r p)$$

Prise comme une équation en P , la relation $\Delta_P = 0$ est l'équation du cercle réduit au seul point $O = X(3)$. Évaluée en $P = A$, cela donne $a^2 b^2 c^2 > 0$: cette quantité est donc positive et $\sqrt{\Delta_P}$ est réelle. Un peu de calcul montre que les points d'intersection U, V entre le cercle circonscrit Γ et la droite OP sont :

$$U, V \simeq 2abc P^{\parallel} \pm \sqrt{\Delta_P} O$$

La matrice $P^{\perp} \cdot (U \wedge V)$ décrit un projecteur de rang 1, agissant sur \mathbb{R}^3 (vu comme un ensemble de colonnes). En tant qu'action sur les barycentriques, $X \mapsto P^{\perp} \cdot (U \wedge V) \cdot X$ a comme effet de sélectionner le P^{\perp} -coefficient de X sur la base (U, V, P^{\perp}) et de le multiplier par $\det(U, V, P^{\perp}) = -64abcS^2 \Delta_P^{3/2}$. Considérons alors la matrice :

$$\boxed{\phi} = \lambda_P P^{\perp} \cdot (U \wedge V) + \lambda_U U \cdot (V \wedge P^{\perp}) + \lambda_V V \cdot (P^{\perp} \wedge U)$$

$$\lambda_P = -4S\sqrt{\Gamma_P}, \lambda_U = -abc(p + q + r) + \sqrt{\Delta_P}, \lambda_V = -abc(p + q + r) - \sqrt{\Delta_P}$$

La transformation associée est une collinéation qui fixe les points U, V, P^{\perp} (quels que soient les λ), qui envoie P sur O et qui laisse globalement invariant le cercle Γ . C'est cette dernière propriété qui fait apparaître la quantité $\sqrt{\Gamma_P}$, tandis que les conjugaisons en $\sqrt{\Delta_P}$ viennent de l'interchangeabilité de U et V . Habituellement, une collinéation est définie par quatre points et leurs images. Ici, le fait que U, V, P soient alignés laisse un degré de liberté, qui peut donc servir à satisfaire une condition supplémentaire.

Il est aisé de voir que $\phi(O)$ est le symétrique de P par rapport à O (par calcul en force brute ou par examen du rapport harmonique avec U, V). Si nous composons ϕ avec la symétrie par rapport à la droite OP^\perp nous obtenons une collinéation ψ dont le carré ψ^2 vérifie $\psi^2(P^\perp) = P^\perp$, $\psi^2(U) = U$, $\psi^2(V) = V$ (comme ϕ) mais aussi $\psi^2(O) = O$. La transformation ψ^2 est donc l'identité, et ψ est une involution. Il est clair que le cercle \mathcal{C}_P ayant $[OP]$ pour diamètre est fixé par ψ .

Les points fixes de ψ sont donc les points de Poncelet du faisceau formé par Γ et le cercle \mathcal{C}_P . Lorsque P est intérieur à Γ , ces points de Poncelet sont réels. Lorsque le point P est le point de Lemoine, le cercle \mathcal{C}_K est le cercle de Brocard, et les Poncelets sont les points isodynamiques (FIG. 3).

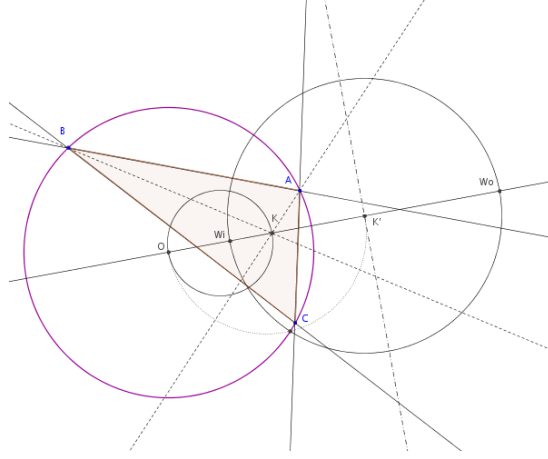


FIG. 3 – Point de Lemoine et points isodynamiques

3 Les points isodynamiques du quadrangle

Pour calculer les points isodynamiques du quadrangle, nous partons de :

$$F_d \doteq X(15, ABC) = a^2 (S_a \sqrt{3} + 2S) : b^2 (S_b \sqrt{3} + 2S) : c^2 (S_c \sqrt{3} + 2S)$$

En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$, on obtient le deuxième point isodynamique, X(16). Avec ces coordonnées, on peut vérifier que les points $O, K_d, F_d, \overline{F}_d$ sont alignés et que les points F_d, \overline{F}_d sont inverses par rapport à Γ (nous avons expliqué pourquoi précédemment). L'un d'eux est donc intérieur au cercle circonscrit, et l'autre extérieur. Une difficulté à venir est qu'il n'existe aucune méthode continue pour décider lequel est à l'intérieur et lequel à l'extérieur. En effet toute conjugaison par rapport à $\sqrt{3}$ (équivalente à un changement global d'orientation) est en même temps une conjugaison par rapport à S (équivalente à un changement de l'orientation du triangle).

Si les points sont placés dans l'ordre $BCDAB$, le point D peut être obtenu par un mouvement continu du sommet C ou du sommet A : les orientations de $\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_d = ABC$ seront les mêmes. Par contre l'orientation de \mathcal{T}_b sera contraire: les deux régions déterminées par le cercle circonscrit contiennent donc chacune un nombre impair de points F_j soit 1 ou 3 selon l'orientation relative du triangle de base et des pelles à tarte définissant X(15), X(16).

Des calculs analogues aux calculs entrepris pour le point de Lemoine donnent :

$$F_a, F_b, F_c = \left(\begin{array}{c} a^2 S_a \sqrt{3} + 2 S a^2 \\ b^2 S_b \sqrt{3} + 2 S b^2 \frac{2+t}{t} \\ c^2 S_c \sqrt{3} + 2 S c^2 \frac{t-1}{t+1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} a^2 S_a \sqrt{3} + 2 S a^2 (1+2t) \\ b^2 S_b \sqrt{3} + 2 S b^2 \\ c^2 S_c \sqrt{3} + 2 S c^2 \frac{1-t}{1+t} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} a^2 S_a \sqrt{3} - 2 S a^2 (1+2t) \\ b^2 S_b \sqrt{3} - 2 S b^2 \frac{2+t}{t} \\ c^2 S_c \sqrt{3} + 2 S c^2 \end{array} \right)$$

Par élimination, on obtient le lieu de F_a lorsque D décrit Γ :

$$\mathcal{L}(F_a) \doteq a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - (x+y+z) \left(\frac{(3S_a - 2S\sqrt{3})b^2 c^2}{(2S_a - bc)(2S_a + bc)} \right) x = 0$$

Il s'agit visiblement du cercle (B, C, F_d) . Par conséquent, le point F_a se trouve tantôt à l'intérieur et tantôt à l'extérieur du cercle circonscrit. Il se trouve dans la région contraire de F_d lorsque A, D sont de part et d'autre de BC et réciproquement. Par inversion, nous avons le lieu de $\overline{F_a}$ et par permutation, nous avons le même comportement pour les autres points.

Voici les équations des cercles $\mathcal{C}_a = (\overline{F_a}, F_b, F_c)$, $\mathcal{C}_b = (F_a, \overline{F_b}, F_c)$, $\mathcal{C}_c = (F_a, F_b, \overline{F_c})$.

$$\mathcal{C}_a = \Gamma(x, y, z) - (x + y + z) \left(\frac{\sqrt{3}}{(b^2 + b^2t - c^2t)\sqrt{3} + 4St} \right) (b^2c^2x - a^2c^2ty + a^2b^2(1+t)z)$$

$$\mathcal{C}_b = \Gamma(x, y, z) - (x + y + z) \left(\frac{\sqrt{3}}{(a^2 + a^2t - c^2t)\sqrt{3} + 4St} \right) (-b^2c^2x + a^2c^2ty + b^2a^2(1+t)z)$$

$$\mathcal{C}_c = \Gamma(x, y, z) - (x + y + z) \left(\frac{\sqrt{3}}{(a^2t + b^2)\sqrt{3} + 4S(1+t)} \right) (b^2c^2x + a^2c^2ty + b^2a^2(1+t)z)$$

Par continuité ou par vérification élémentaire, chacun de ces cercles contient F_d . On identifie les facteurs linéaires comme étant les équations des droites JK, KI, IJ . Ainsi, par exemple, le cercle \mathcal{C}_c , son inverse $\overline{\mathcal{C}_c}$, le cercle Γ lui-même et la droite IJ appartiennent au même faisceau. Sur la figure, cela donne les cercles en magenta, qui, pour cette configuration, contiennent tous les points intérieurs pour l'un et tous les points extérieurs pour l'autre.

Par contre, les deux autres cercles contiennent deux points d'une sorte et deux points de l'autre. Par exemple $F_a, F_b, \overline{F_c}, \overline{F_d}$ pour l'un des cercles verts. Par contre, il n'y a pas de cercle $(F_a, \overline{F_b}, F_c, \overline{F_d})$ car A, C et B, D sont diagonaux (pour cette figure). Il y a donc trois paires de cercles, avec un faisceau de Poncelet, et deux faisceaux à points de base.

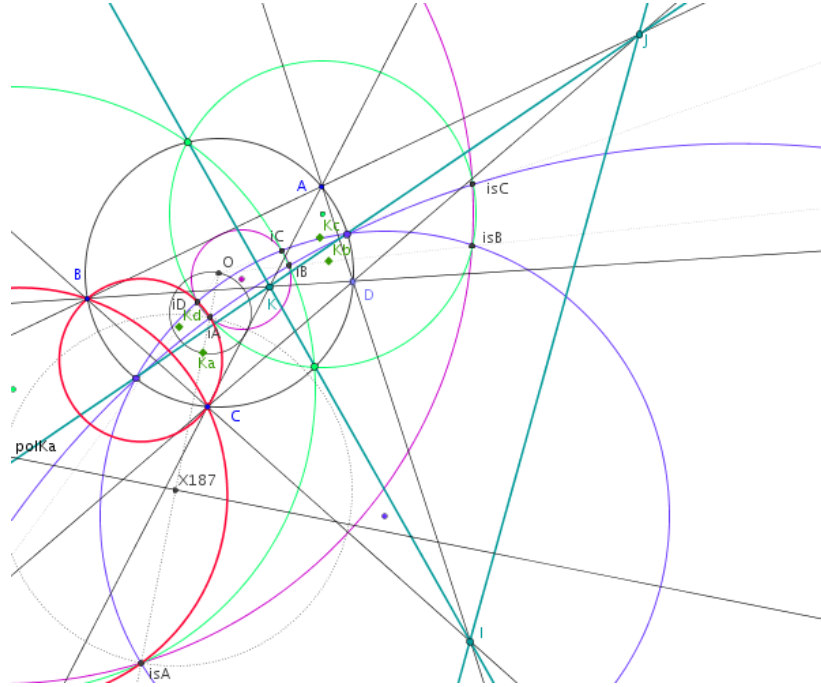


FIG. 4 – Points isodynamiques du quadrangle

4 Confirmations utilisant la représentation de Morley

On sait que la représentation de Morley consiste à utiliser des turns α, β, γ pour décrire les sommets A, B, C du triangle de référence (ne considérant pas de "weak points", nous n'avons pas à utiliser la représentation de Lubin, utilisant des puissances des turns formant la base algébrique). Nous introduisons également τ de module 1 pour représenter D . Le paramètre rationnelle t n'est plus utile. On l'expulse des formules précédentes par :

$$t = -\frac{(\beta - \tau)(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \tau)}$$

Les points I, J, K ont les affixes suivants :

$$I = \frac{\tau \alpha (\beta + \gamma) - \beta \gamma (\alpha + \tau)}{\tau \alpha - \beta \gamma}, J = \frac{\tau \beta (\alpha + \gamma) - \alpha \gamma (\beta + \tau)}{\tau \beta - \alpha \gamma}, K = \frac{\tau \gamma (\alpha + \beta) - \alpha \beta (\gamma + \tau)}{\tau \gamma - \alpha \beta}$$

Chacun d'eux est visiblement invariant sous l'action du groupe de Klein de $\{\alpha, \beta, \gamma, \tau\}$, et le triplet forme un triangle autopolaire. Par contre, les points de Lemoine ont une expression qui ne se simplifie guère :

$$K_d = \frac{2(\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 - \alpha \gamma \beta (\alpha + \beta + \gamma))}{\alpha \gamma^2 + \alpha \beta^2 + \beta \alpha^2 + \beta \gamma^2 + \gamma \beta^2 + \gamma \alpha^2 - 6 \alpha \beta \gamma}$$

On en déduit une expression de la transformation f qui reste quelque peu "effrayante" même en utilisant les fonctions symétriques usuelles $s_1 = \alpha + \beta + \gamma + \tau$, etc. On obtient en effet :

$$f(Z) = \frac{\left(\begin{array}{l} (8 s_3 s_4 s_1 - 6 s_4 s_1^2 s_2 - 64 s_4^2 - 6 s_3^2 s_2 + 2 s_1^2 s_3^2 + 16 s_4 s_2^2) Z \\ + (32 s_4^2 s_2 - 8 s_4 s_3^2 - 36 s_1^2 s_4^2 + 28 s_4 s_1 s_2 s_3 - 12 s_3^2 s_4 + 2 s_3^2 s_2^2 - 6 s_3^3 s_1) \bar{Z} \\ + 96 s_4^2 s_1 - 6 s_1^2 s_4 s_3 - 2 s_3^2 s_2 s_1 - 64 s_4 s_2 s_3 + 18 s_3^3 + 8 s_4 s_2^2 s_1 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} (-9 s_1^3 s_4 - 48 s_3 s_4 + 32 s_4 s_1 s_2 - 4 s_2^2 s_3 + s_2 s_3 s_1^2 + 3 s_3^2 s_1) Z \\ + (-48 s_4^2 s_1 + 3 s_1^2 s_4 s_3 + s_3^2 s_2 s_1 + 32 s_4 s_2 s_3 - 9 s_3^3 - 4 s_4 s_2^2 s_1) \bar{Z} \\ + 128 s_4^2 - 16 s_3 s_4 s_1 + 12 s_3^2 s_2 + 12 s_4 s_1^2 s_2 - 32 s_4 s_2^2 - 4 s_1^2 s_3^2 \end{array} \right)}$$

Par contre, les transformations ϕ et ψ ont une expression simple. On peut bien sûr les calculer directement, mais il est intéressant de les retrouver à partir des expressions en barycentriques. On commence par le point (z, ζ) qui devient :

$$P = p : q : r = \frac{(\beta \gamma \zeta + z - \beta - \gamma) \alpha}{(\alpha - \gamma) (\alpha - \beta)} : \frac{(\gamma \alpha \zeta + z - \gamma - \alpha) \beta}{(\beta - \gamma) (\beta - \alpha)} : \frac{(\alpha \beta \zeta + z - \alpha - \beta) \gamma}{(\beta - \gamma) (\alpha - \gamma)}$$

expression qui fournit des barycentriques réels et de somme 1. On obtient alors :

$$W = \frac{i(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}{\alpha \beta \gamma} R^3 \sqrt{\zeta z} \quad \text{et} \quad Wz = R \sqrt{1 - \zeta z}$$

expressions réelles (il est intéressant de laisser les R qui se simplifieront... si ces quantités sont employées de façon homogène).

On obtient alors $U, V = \pm z / \sqrt{\zeta z} \dots$ qui n'est pas une surprise, $Z \mapsto -(z/\zeta) \bar{Z}$ pour la symétrie OP^\perp , puis :

$$\phi(Z) = \frac{(\sqrt{1 - \zeta z} - 1) z \bar{Z} - (\sqrt{1 - \zeta z} + 1) \zeta Z + 2 \zeta z}{(\zeta Z + z \bar{Z} - 2) \zeta}$$

$$\psi(Z) = \frac{(1 + \sqrt{1 - \zeta z}) z \bar{Z} + (1 - \sqrt{1 - \zeta z}) \zeta Z - 2 \zeta z}{(\zeta Z + z \bar{Z} - 2) \zeta}$$

On vérifie aisément que $\phi(0) = -z$ et $\psi(0) = z$.

Pour ce qui est des isodynamiques, on obtient :

$$F_d = -\omega \frac{(\alpha \beta + \omega^2 \beta \gamma + \omega \gamma \alpha)}{\alpha + \omega^2 \beta + \omega \gamma}$$

$$F'_d = -\omega^2 \frac{(\alpha \beta + \omega \beta \gamma + \omega^2 \gamma \alpha)}{\alpha + \omega \beta + \omega^2 \gamma}$$

avec $\omega^3 = 1$. La conjugaison en $\sqrt{3}$ s'obtient en remplaçant ω par ω^2 , tandis que $F_d \bar{F}'_d = 1$ (inverses par rapport au circonscrit). Ces formules rappellent que les isodynamiques sont les isogonaux des points Fermat (pelles à tarte en $\cot \phi = \pm 1/\sqrt{3}$). A partir de ces formules, il est aisé de vérifier les cocyclicités en utilisant les déterminants en $[\zeta z, z, \zeta, 1]$.